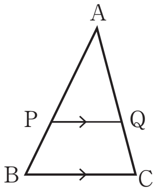
第18講　三角形と比

§1 ▶ 線分の内分・外分，角の二等分線と比

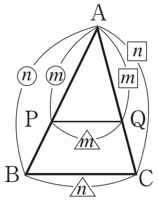
要点整理 と 公式

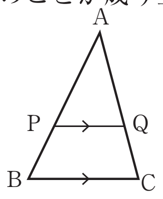
要点 1 平行線と比 その①

三角形における平行線と線分の比について，次のことが成り立つ。

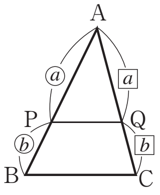


⇒
⇐





⇒
⇐



PQ // BC　　AP : AB = AQ : AC = PQ : BC

PQ // BC　　AP : PB = AQ : QC

要点 2 線分の内分と外分

m，n を正の数とする。

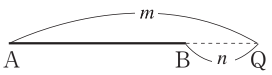
線分 AB 上に点 P があり，AP : PB = $m : n$ が成り立つとき，

点 P は線分 AB を $m : n$ に「　　　」するという。

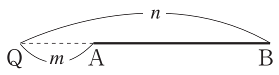
線分 AB の延長上に点 Q があり，AQ : QB = $m : n$ が成り立つとき，

点 Q は線分 AB を $m : n$ に「　　　」するという。

$m > n$ のとき



$m < n$ のとき



（ex）線分 AB を 1 : 2 に内分する点　　A ―――― B

線分 AB を 4 : 1 に外分する点　　A ―――― B

線分 AB を 2 : 3 に外分する点　　A ―――― B

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

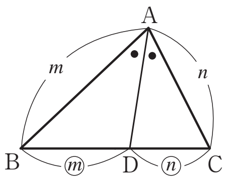
要点❸ 三角形の角の二等分線と比

三角形の角の二等分線について，次のことが成り立つ。

■三角形の角の二等分線と比

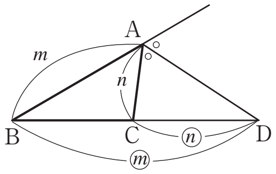
① △ABC の∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，D は BC を AB：AC に内分する。

つまり　BD：DC = AB：AC

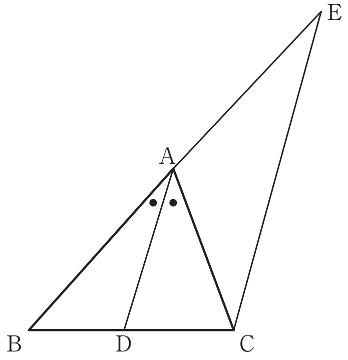


② △ABC の∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長線との交点を D とすると，D は BC を AB：AC に外分する。

つまり BD：DC = AB：AC



＜①について＞



※上記②で，AB = AC のときは，外角の二等分線は辺 BC と平行になる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

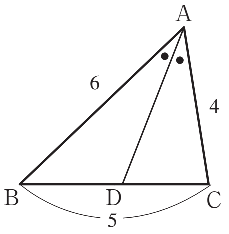
1

AB ＝ 6，BC ＝ 5，CA ＝ 4 の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

(1)　辺 CD の長さを求めよ。

(2)　∠A の外角の二等分線が直線 BC と交わる点を E とする。BE：EC を求め，点 E を図示せよ。

(3)　CE の長さを求めよ。

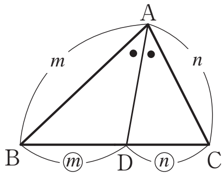


Point Pickup

角の二等分線と比

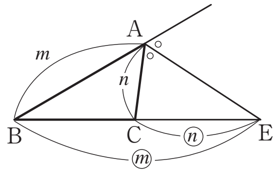
△ABC において

AD が∠A の二等分線のとき



BD：DC ＝ AB：AC

AE が∠A の外角の二等分線のとき



BE：EC ＝ AB：AC

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

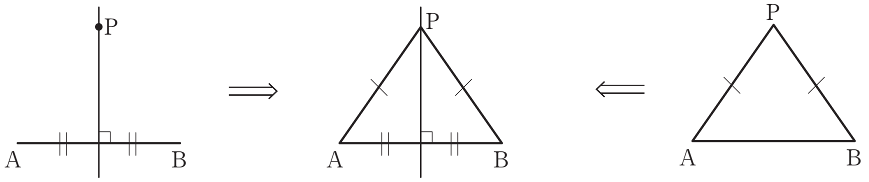
§2 ▶ 三角形の外心・内心

要点整理 と 公式

要点 4 三角形の外心

線分 AB の垂直二等分線上の点 P は，2 点 A，B から等距離にある。

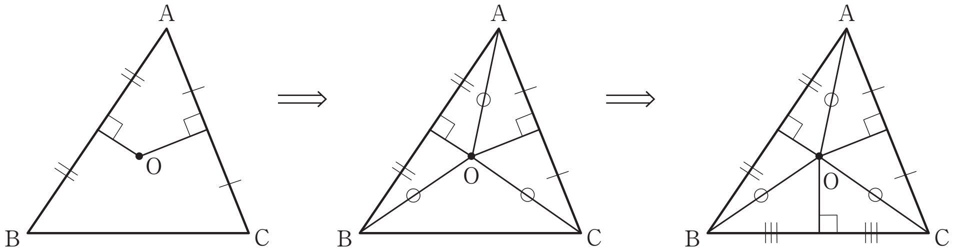
また，2 点 A，B から等距離にある点 P は，線分 AB の垂直二等分線上にある。

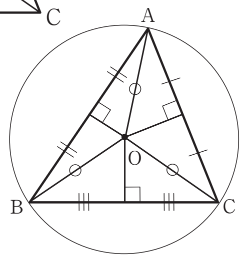


このことより，次のことがいえる。

■ 三角形の辺の垂直二等分線

三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。





上の図の点 O について，OA ＝ OB ＝ OC より，

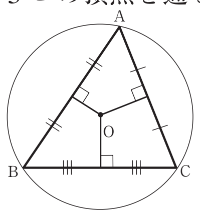
点 O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。

この円を三角形の「　　　　　」といい，その中心 O を

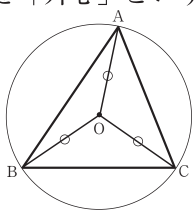
「　　　　」という。

■ 三角形の外接円と外心

三角形の 3 つの頂点を通る円を「外接円」，その中心を「外心」という。



外心は 3 辺の垂直二等分線の交点



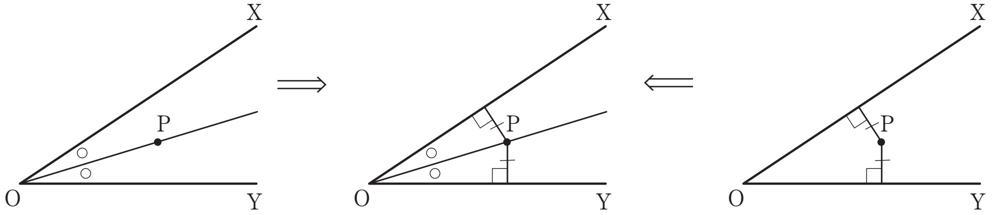
OA ＝ OB ＝ OC

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点５ 三角形の内心

∠XOY の二等分線上の点 P は，2 辺 OX，OY から等距離にある。

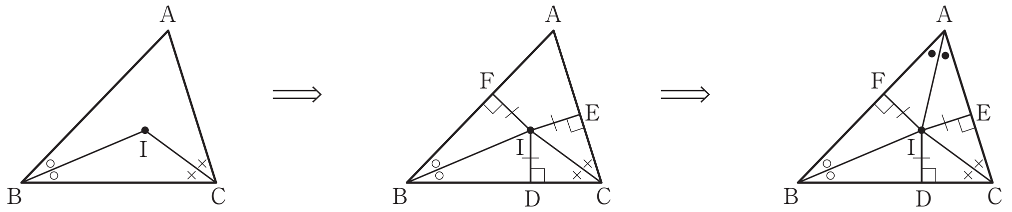
また，2 辺 OX，OY から等距離にある点 P は，∠XOY の二等分線上にある。

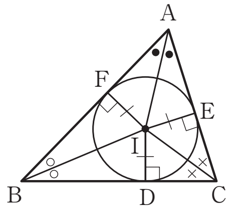


このことより，次のことがいえる。

■ 三角形の角の二等分線

三角形の 3 つの角の二等分線は 1 点で交わる。





上の図の点 I について，ID = IF = IE より，

点 I を中心として 3 点 D，E，F を通る円をかくことができる。

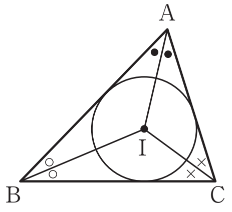
この円は三角形の 3 辺に 3 点 D，E，F で接している。

この円を三角形の「　　　　」といい，その中心 I を

「　　　」という。

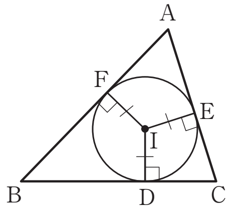
■ 三角形の内接円と内心

三角形の 3 つの辺に接する円を「内接円」，その中心を「内心」という。



内心は

3 つの角の二等分線の交点



ID = IF = IE

ID ⊥ BC，IE ⊥ CA，IF ⊥ AB

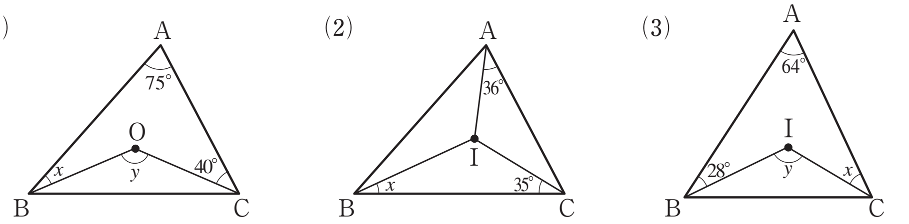
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

下の図において，点 O は △ABC の外心，点 I は△ABC の内心である。

x，yを求めよ。

(1)　(2)　(3)

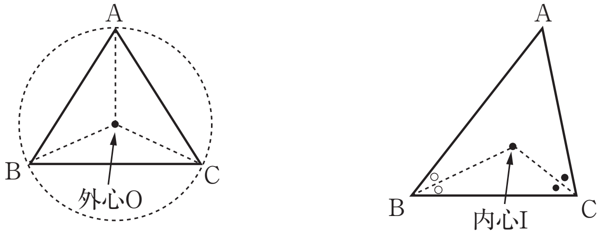


Point Pickup

三角形の外心・内心

三角形の外心　→　外接円をかき，半径や円周角および中心角を意識

三角形の内心　→　角の二等分線を意識し，等しい角に注目



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

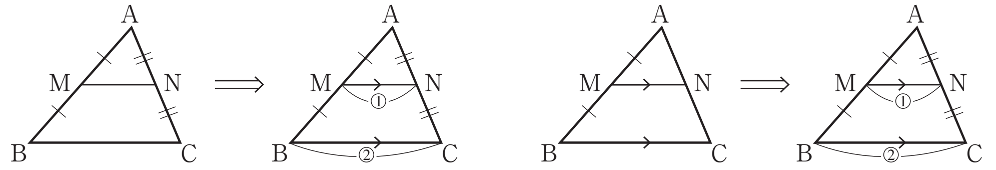
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 三角形の重心

要点整理 と 公式

要点6 中点連結定理

三角形の2辺の中点を結んだ線分について，次のことが成り立つ。

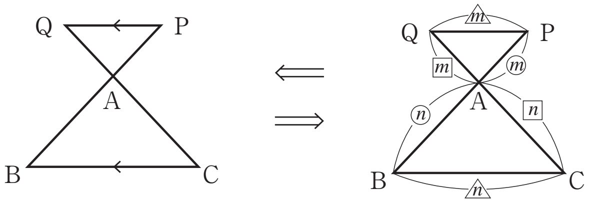


辺ABの中点をM　辺ACの中点をN　⟹　MN // BC　MN : BC = 1 : 2

辺ABの中点をM　MN // BC　⟹　Nは辺ACの中点　MN : BC = 1 : 2

要点7 平行線と比 その②

三角形における平行線と線分の比について，右のことが成り立つ。



PQ // BC　⟺　AP : AB = AQ : AC = PQ : BC

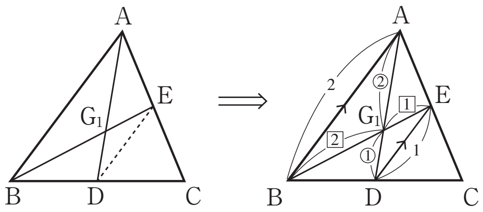
要点8 三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結んだ線分を「中線」という。

△ABC において，中線 AD と中線 BE の交点を G_1 とすると，中点連結定理より，AB // DE かつ

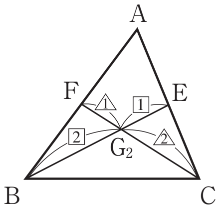
AB : DE = 2 : 1

よって，$AG_1 : G_1D = BG_1 : G_1E = 2 : 1$



同様に，△ABC において，中線 BE と中線 CF の交点を G_2 とすると，

$CG_2 : G_2F = BG_2 : G_2E = 2 : 1$



G_1，G_2 はともに中線 BE を 2 : 1 に内分する点より，この2点は一致する。

よって，3本の中線は1点で交わり，その交点は各中線を 2 : 1 に内分する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

このことより，次のことがいえる。

■ 三角形の中線

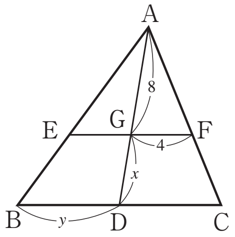
三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その交点は各中線を 2：1 に内分する。

三角形の 3 本の中線の交点を，三角形の「　　　」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

下の図において，点G は△ABC の重心で，EF // BC である。x，y の値を求めよ。

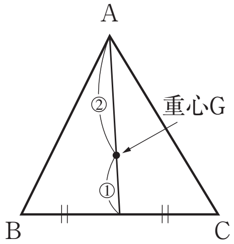


Point Pickup

三角形の重心

・三角形の重心　→　中線を 2：1 に内分する。

・三角形の重心と頂点を結ぶ直線は，その頂点の対辺の中点を通る。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 チェバの定理，メネラウスの定理

要点整理 と 公式

要点 9 三角形の面積と線分の比

2つの三角形の面積について，次のことがいえる。

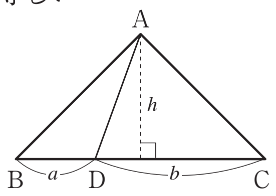
①　高さが等しい2つの三角形の面積の比は，底辺の比に等しい

②　底辺の長さが等しい2つの三角形の面積の比は，高さの比に等しい

(ex) 右図において，2つの△ABDと△ACDは

高さがともに h であることから

△ABD：△ACD = 　　　：



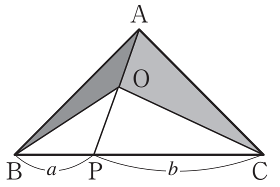
②より，次のことが成り立つ。

■ 三角形の面積と線分の比

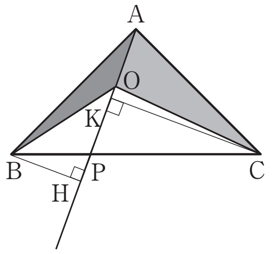
△ABCの内部にある点をOとし，直線AOと

辺BCの交点をPとすると，

△ABO：△ACO = BP：CP　　が成り立つ。



△ABO：△ACO = a：b



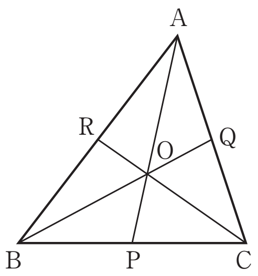
要点 10 チェバの定理

右図の三角形において，次の①～③が成り立つ。

BP：PC = △OAB：△OAC　よって $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{\triangle OAB}{\triangle OAC}$ …①

CQ：QA =△OBC：△OAB　よって $\dfrac{CQ}{QA} = \dfrac{\triangle OBC}{\triangle OAB}$ …②

AR：RB =△OCA：△OCB　よって $\dfrac{AR}{RB} =$ 　　　　…③



①，②，③を辺々かけて

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}\cdot\frac{\triangle OBC}{\triangle OAB}\cdot\frac{\triangle OAC}{\triangle OBC}$$

が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

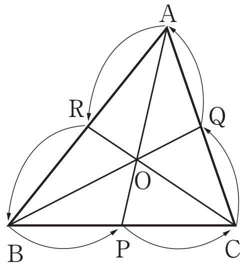
よって，三角形とその内部の 1 点について以下のことがいえる。

■ **チェバの定理**

△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，

3 直線 AP，BQ，CR が 1 点 O で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



要点11 メネラウスの定理

三角形と 1 本の直線について，以下のことがいえる。

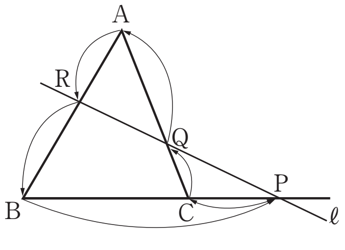
■ **メネラウスの定理**

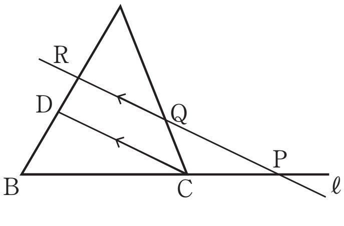
△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長したものと，

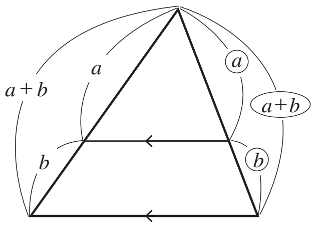
頂点を通らない直線 ℓ がそれぞれ点 P，Q，R で

交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$







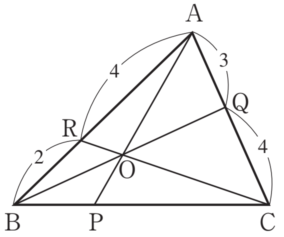
$$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RD},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{DR}{RA}$$

よって　$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

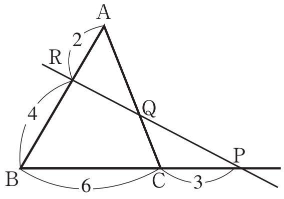
4

［1］　右の図において，BP：PC を求めよ。

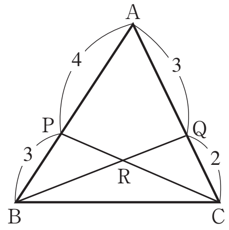


［2］　下の図において，次の比を求めよ。

(1)　CQ：QA



(2)　PR：RC

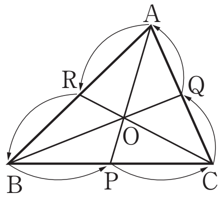


Point Pickup

チェバの定理・メネラウスの定理

図１，図２ともに $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ が成り立つ。

＜図１＞



チェバの定理

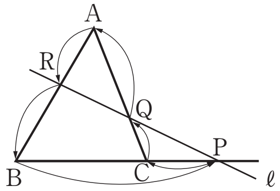
⇒　三角形の「３頂点から引いた直線が１点で交わる」ときに利用。

メネラウスの定理

⇒　「三角形と直線１本」が基本。

また，「２頂点から引いた割線」が互いに他を分ける比に関する問題でも利用。

＜図２＞



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

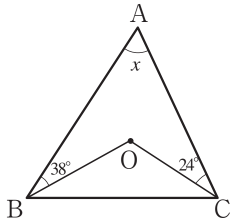
第18講　確認テスト

1　AB = 6, BC = 5, CA = 4 の △ABC において，∠Aの二等分線と辺 BC との交点をD，∠Aの外角の二等分線が直線BC と交わる点をE とする。

このとき，CD = [ア]，CE = [イウ] である。

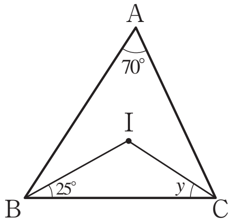
2　下の図において，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である。x，y を求めよ。

(1)



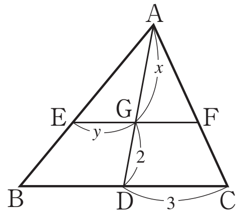
x = [エオ]°

(2)



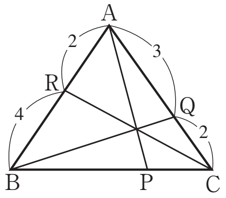
y = [カキ]°

3　右の図において，点 G は △ABC の重心であり，EF // BC である。このとき x = [ク]，y = [ケ] である。



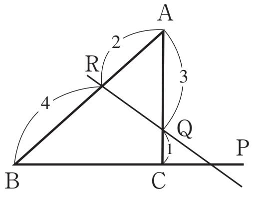
4　下の図で，BP：PC を求めよ。

(1)



BP：PC = [コ]：[サ]

(2)



BP：PC = [シ]：[ス]

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

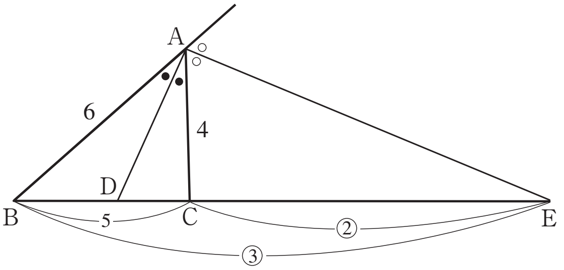
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　三角形と比

1

（1）　$CD = 5 \times \dfrac{2}{3+2} = 2$

（2）　右図



（3）　$CE = x$ とおくと

$3 : 2 = (5 + x) : x$

$3x = 2(5 + x)$

$x = 10$

よって　$CE = 10$

2

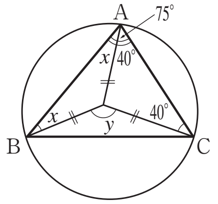
（1）　$x = 75^\circ - 40^\circ = 35^\circ$,　　$y = \angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 75^\circ = 150^\circ$

（2）　$2x + 35^\circ + 35^\circ + 36^\circ + 36^\circ = 180^\circ$　$x = 19^\circ$

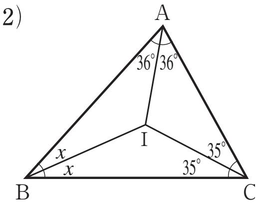
（3）　$2x + 28^\circ + 28^\circ + 64^\circ = 180^\circ$　　$x = 30^\circ$

$y = 180^\circ - (28^\circ + 30^\circ) = 122^\circ$

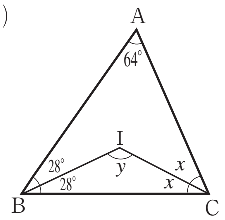
（1）



（2）



（3）



3

$8 : x = 2 : 1$　より　$2x = 8$　　$x = 4$

$AG : AD = GF : DC$　より　$8 : 12 = 4 : DC$　　$8DC = 48$　　$DC = 6$

$BD = DC$　より　$y = 6$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］　チェバの定理より　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

よって　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{2}=1$　　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{8}$　　よって　BP：PC ＝ 3：8

［2］（1）メネラウスの定理より $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

よって　$\dfrac{9}{3}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{2}{4}=1$　　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{3}$　　よって　CQ：QA ＝ 2：3

（2）メネラウスの定理より　$\dfrac{AB}{BP}\cdot\dfrac{PR}{RC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$

よって　$\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{PR}{RC}\cdot\dfrac{2}{3}=1$　　$\dfrac{PR}{RC}=\dfrac{9}{14}$　　よって　PR：RC ＝9：14

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

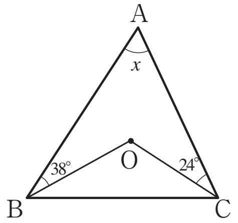
第18講　確認テスト

1　AB = 6，BC = 5，CA = 4 の △ABC において，∠Aの二等分線と辺 BC との交点をD，∠Aの外角の二等分線が直線BC と交わる点をE とする。

このとき，CD = [ア]，CE = [イウ] である。

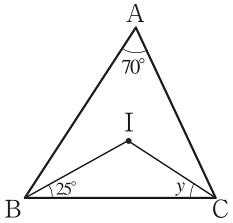
2　下の図において，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である。x，y を求めよ。

(1)



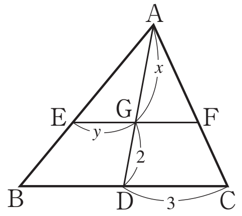
x = [エオ]°

(2)



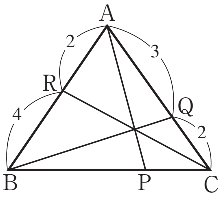
y = [カキ]°

3　右の図において，点 G は △ABC の重心であり，EF // BC である。このとき x = [ク]，y = [ケ] である。



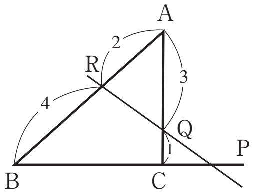
4　下の図で，BP：PC を求めよ。

(1)



BP：PC = [コ]：[サ]

(2)



BP：PC = [シ]：[ス]

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

1　ア　2　　イ　1　　ウ　0

2　(1)　エ　6　　オ　2　　(2)　カ　3　　キ　0

3　ク　4　　ケ　2

4　(1)　コ　3　　サ　1　　(2)　シ　6　　ス　1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。